SUITES ET SERIES DE FONCTIONS

Exercices d'oraux

Les exercices qui suivent sont extraits d'oraux pour les concours Centrale et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Il s'agit d'exercices rapportés par les candidats, dont l'exactitude et l'authenticité ont été vérifiées.

Tous les exercices portent sur le sujet des suites et séries de fonctions, donc sur leur modes de convergence et les propriétés d'une limite de suite et plus particulièrement d'une série de fonctions (continuité, dérivabilité, existence de limite...).

L'intérêt d'une telle fiche d'exercices et qu'ils peuvent être traités (à quelques questions) directement après le chapitre en question, et donc bien avant la période de révision des oraux.

Il est bon d'anticiper le niveau des concours pour ne pas être pris au dépourvu. Aussi, il est bon de traiter ces exercices le plus tôt possible dans l'année.

Bon courage pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Mines-Ponts MP : Etudier les modes de convergence de (u_n) et $\sum u_n$ sur $[0,1]$ où u_n est définie pour tout entier n sur $[0,1]$ par $u_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Exercice 2

D'après Mines-Ponts PC : Pour tout $x \in]-1,+\infty[$ on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x(x+n)}$. Montrer que f est bien définie, qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer l'expression de $f^{(k)}$ pour tout entier k.

Exercice 3

D'après Centrale PC : Lorsque cela est défini on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nxe^{-nx^2}$.

1. Justifier l'existence de f et étudier les modes de convergence de la série qui la définit.
2. Calculer $f(x)$ sans série en intégrant.

Exercice 4

D'après Centrale PSI : Soit $\theta \in]0,\pi[$. Pour tout $t \in [0,1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n(t) = t^{n-1}\sin(n\theta)$$

1. Montrer la convergence uniforme de $\sum u_n$ sur $[0,1[$. On note S sa somme.
2. Justifier que S est intégrable sur $[0,1[$.

3. Soit $v_n = \dfrac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer la convergence de $\sum v_n$ et calculer la somme de la série.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts MP : Pour tout entier $n \geqslant 2$, on défini sur $[0, +\infty[$:

$$f_n : x \mapsto \frac{xe^{-nx}}{\ln(n)}$$

1. Montrer que $\sum f_n$ converge simplement mais ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.
2. Montrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
3. On note f la fonction somme de la série.
   (a) Montrer que f est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.
   (c) Pour tout $k \geqslant 2$ entier, déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k f(x)$.

Exercice 6

D'après Mines-Ponts MP : Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on note si cela est défini :

$$u_n(x) = \frac{1}{x(x+1)...(x+n)} \qquad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$$

1. Montrer que S est bien définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$ on a $xS(x) = 1 + S(x+1)$.
3. En déduire un équivalent de S en 0^+.
4. Décomposer $u_n(x)$ en éléments simples.
5. En déduire une écriture de $S(x)$ comme un produit de Cauchy puis une expression sans produit.

Exercice 7

D'après Centrale MP : Lorsque cela est défini on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x^2}{n(1+x^2)}\right)$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 8

D'après Centrale MP : Pour tout $x > 0$, on définit les suites $(u_n(x))$ et $(v_n(x))$ par :

$$\begin{cases} u_0(x) = x \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(x) = u_n(x) + u_n(x)^2 \end{cases} \qquad v_n(x) = \frac{\ln(u_n(x))}{2^n}$$

1. Montrer que $(u_n(x))$ est croissante et déterminer sa limite $n \to +\infty$.
2. Justifier que $(v_n(x))$ est bien définie et que $\sum(v_{n+1}(x) - v_n(x))$ converge et qu'il existe $\alpha(x)$ tel que $v_n(x) - \alpha(x) = o\left(\frac{1}{2^n}\right)$
3. Montrer que la fonction α est continue.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP : Soit $f_0 : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \qquad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$$

On pose enfin lorsque cela est définit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

1. Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer g uniquement en fonction de f_0.

Exercice 10

D'après Centrale MP : Soit $q \in]0, 1[$. On pose pour tout $x \in] - q^{-1}, q^{-1}[$:

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (1 - q^k x)$$

1. Etudier la convergence de (f_n). On s'intéressera à la convergence uniforme. On note f sa limite.
2. Montrer qu'il existe une fonction continue g à définir qui vérifie $g(x) = (1 - qx)g(qx)$.
3. Montrer que f est développable en série entière et calculer son développement

Corrigé de l'exercice 1

On commence par les modes de convergence de la suite de fonctions (u_n).

- **Convergence simple**. On a déjà $u_n(1) = 0$. Pour tout $x \in [0,1[$, on aura toujours quitte à utiliser les croissances comparées $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$. Il y a donc convergence simple vers la fonction nulle.

- **Convergence uniforme**. Il s'agit d'étudier $\|u_n\|_\infty$. Posons la fonction auxiliaire $f_n(x) = x^n(1-x)$. f_n est dérivable sur $[0,1]$ avec $f_n'(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}((n+1)x-n)$. f_n est donc croissante sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$, décroissante sur $\left[\dfrac{n}{n+1}, 1\right]$ et atteint son maximum en $\dfrac{n}{n+1}$. Il en est de même pour u_n et donc :

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{n^\alpha}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$$

On a par un classique développement limité $\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$ donc $\|u_n\|_\infty$ converge vers 0 si et seulement si $\alpha < 1$ par comparaison des degrés sur $\dfrac{n^\alpha}{n+1}$.

Finalement, la convergence simple est indépendante de α alors que la convergence uniforme nécessite $\alpha < 1$.

On poursuit par les modes de convergence de la série de fonctions $\sum u_n$.

- **Convergence simple**. $\sum u_n(0)$ converge bien entendu. Pour $x \in [0,1[$, on a par croissance comparée $u_n(x) = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et ce pour toute valeur de α. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum u_n(x)$ converge. Il y a donc convergence simple pour toute valeur de α.

- **Convergence normale**. On a par l'étude de la suite $\|u_n\|_\infty \sim en^{\alpha-1}$. La série $\sum \|u_n\|_\infty$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < -1$ donc $\alpha < 0$. En revanche, sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a < 1$, on a $\|u_n\|_\infty \leqslant n^\alpha a^n$. On retrouve par le même principe que la convergence simple la convergence normale de la série de fonctions $\sum u_n$ sur $[0,a]$.

- **Convergence uniforme**. La convergence uniforme a lieu d'office pour $\alpha < 0$ par la convergence normale. Elle a lieu pour toute valeur de α sur $[0,a]$ pour $a < 1$ pour les mêmes raisons. Pour tout $\alpha \geqslant 1$, on constate que $\|u_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0 et on ne peut pas avoir convergence uniforme. On peut donc étudier la convergence uniforme sur $[0,1]$ pour $\alpha \in [0,1[$.

  Si $x \in [0,1]$, étudions le reste de la série de fonction $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$. On a en fait :

$$R_n(x) \geqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k(1-x) = x^{n+1} \Longrightarrow \|R_n\| \geqslant \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

Par un développement limité on a encore $\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-1} \neq 0$. On n'a pas convergence uniforme de R_n sur $[0,1]$ ni même sur $[0,1[$ vers la fonction nulle. Il n'y a pas convergence uniforme pour $\alpha \in [0,1[$.

Finalement, on a toujours la convergence simple de $\sum u_n$ sur $[0,1]$, sa convergence normale et uniforme pour $\alpha < 0$ et enfin sa convergence normale et uniforme sur $[0,a]$ pour toute valeur de α.

Corrigé de l'exercice 2

Pour toute la suite, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $u_n : x \mapsto \dfrac{x}{n(n+x)}$ Pour montrer que f est bien définie, il faut montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum u_n$.

Si $x \in]-1,+\infty[$, on a clairement $|u_n(x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{n^2}$ sauf pour $x = 0$ où il s'agit de la série nulle. On trouve une série dominée par une série de Riemann convergente, d'où la convergence absolue et donc simple de la série de fonctions.

Pour le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f, il faut itérer le théorème de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout entier k. Pour faciliter le calcul des dérivées, notons que :

$$u_n(x) = \frac{x+n-n}{n(x+n)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{x+n}$$

- Pour tous entiers k et n, la fonction u_n est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $]-1,+\infty[$ avec :

$$u_n^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}$$

- Soit $[a,b]$ un segment de $]-1,+\infty[$. On montre la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum u_n^{(k)}$ sur ce segment par la convergence normale. En effet, on a :

$$\forall x \in [a,b], \left|u_n^{(k)}(x)\right| \leqslant \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \Longrightarrow \left\|u_n^{(k)}\right\|_\infty \leqslant \frac{(k-1)!}{(n+a)^{k+1}} = O\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right)$$

On a encore une comparaison à une série de Riemann convergente.

Le théorème cité permet de dire que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$ avec pour tout entier k non nul :

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k k!}{(x+n)^{k+1}}$$

Corrigé de l'exercice 3

1. Pour $x = 0$, on a bien sûr $f(0) = 0$. Pour tous les autres cas de x, notons que $\left|nxe^{-nx^2}\right| = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ en utilisant les croissances comparées. La série $\sum u_n(x)$ est convergente car absolument convergente ($u_n(x) = nxe^{-nx^2}$). On conclut que f est définie sur $\mathbb{R}$.

   Pour la convergence uniforme et normale, on étudie la fonction u_n. Elle est impaire, dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $u_n'(x) = n(1-2nx^2)e^{-nx^2}$. On trouve donc :

$$\|u_n\|_\infty = u_n\left(\sqrt{\frac{1}{2n}}\right) = \sqrt{\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2}}$$

   Le terme $\|u_n\|_\infty$ ne tend pas vers 0, il n'y a pas convergence uniforme ou normale sur $\mathbb{R}$, ni même sur un intervalle où 0 est adhérent. En revanche, sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$ on a à partir d'un certain rang de sorte que $\sqrt{\frac{1}{2n}} \leqslant a$ par les variations de la fonction l'inégalité $\|u_n\|_\infty \leqslant |u_n(a)|$ et on a vu que $\sum u_n(a)$ convergeait. On a donc la convergence normale et donc uniforme sur un tel ensemble.

2. Notons qu'il n'y a pas convergence uniforme sur un intervalle pour lequel 0 est adhérent. De ce fait, on n'a pas forcément la continuité et l'intégrabilité de f en 0.
   On a $f(0) = 0$. f étant une fonction impaire, il suffit de calculer $f(x)$ pour $x > 0$. On a bien sûr si F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$:

$$F(x) - F(1) = \int_1^x \sum_{n=1}^{+\infty} nte^{-nt^2}dt$$

   Il faut maintenant permuter $\int$ et σ par le théorème de la convergence uniforme sur le segment $[1, x]$:

   - Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : t \mapsto nte^{-nt^2}$ est continue sur $[1, x]$.
   - $\sum u_n$ converge normalement sur $[1, x]$ donc uniformément.

   Le théorème de permutation $\int / \Sigma$ cité permet d'écrire :

$$F(x) - F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_1^x nte^{-nt^2}dt\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-nt^2}\right]_{t=1}^{t=x} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-nx^2} - e^{-n})$$

   On a deux sommes géométriques à calculer soit :

$$F(x) - F(1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}} - \frac{e^{-1}}{1-e^{-1}}\right)$$

   On retrouve f en dérivant le résultat obtenu :