Les exercices qui suivent sont extraits d'oraux pour les concours Centrale et Mines-Ponts des filières MP, PC et PSI. Il s'agit d'exercices rapportés par les candidats, dont l'exactitude et l'authenticité ont été vérifiées.

Tous les exercices portent sur le sujet des suites et séries, donc sur la convergence de celles-ci, la nature de séries, le calcul de limite et de sommes de séries,... Il faut noter que sur certains exercices (rares), d'autres notions (comme les séries entières) sont nécessaires mais cela reste très marginal.

L'intérêt d'une telle fiche d'exercices et qu'ils peuvent être traités (à quelques questions) directement après le chapitre en question, et donc bien avant la période de révision des oraux.

Il est bon d'anticiper le niveau des concours pour ne pas être pris au dépourvu. Aussi, il est bon d'étudier ces exercices le plus tôt possible dans l'année. En effet, le chapitre des séries numériques est souvent traité au début de l'année.

Bon courage pour vos révisions !

Exercice 1

D'après Centrale PSI : Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{(\ln(n))^{\ln(\ln(n))}}$.

Exercice 2

D'après Mines-Ponts MP : Déterminer selon a et b strictement positif la nature de la série de terme général :

$$u_n = \left(\frac{n+1}{an+b}\right)^{n\ln(n)}$$

Exercice 3

D'après Mines-Ponts MP : Déterminer selon les valeurs de $a > 0$ et $\alpha > 0$ la nature de la série de terme général $u_n = a^{\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)}$.

Exercice 4

D'après Centrale PSI

1. Soit $\lambda \in]0,1[$. Calculer pour tout entier k la somme $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (1-\lambda)^{n-k}$.

2. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente. Pour k entier fixé on pose pour tout entier n :

$$v_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n-i+k}{k} (1-\lambda)^{n-i} u_i$$

Montrer que $\sum v_n$ est absolument convergente et calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ en fonction de $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts PC : Soit (u_n) une suite à termes positifs de limite nulle. On pose :

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in \mathbb{R} / \sum u_n^x \text{ converge} \right\}$$

1. Montrer que $\mathcal{D} \subset]0, +\infty[$ et que si $\mathcal{D} \neq \emptyset$, alors $\mathcal{D}$ est de la forme $]s, +\infty[$ ou $[s, +\infty[$ avec $s \geqslant 0$.
2. Donner des exemples où $\mathcal{D} = \emptyset$, $\mathcal{D} = [s, +\infty[$ et $\mathcal{D} =]s, +\infty[$.

Exercice 6

D'après Centrale MP : On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Soit u une suite telle que $u_k = O\left(\frac{1}{k^2}\right)$. Que dire que la suite $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$? Justifier.
2. Montrer qu'on a le développement asymptotique $H_n = \ln(n) + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)$. (*Indication : considérer $T_n = H_n - \ln(n)$ et sa série télescopique*).

Exercice 7

D'après Mines-Ponts MP : Déterminer selon les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ un équivalent de :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k \ln(k)$$

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP : Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs telle qu'il existe $\lambda > 0$ et une suite v_n dont la série $\sum v_n$ est absolument convergente vérifiant la relation :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + v_n$$

1. Montrer que la série $\sum \frac{\lambda}{n} + \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge.
2. En déduire que la suite $(n^\lambda u_n)$ converge.
3. Sans utiliser la formule de Stirling, déterminer la nature de la série $\sum \frac{n^n}{n! e^n}$.

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité de $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $x_n e^{nx_n} = 1$.
2. Etudier l'existence et la valeur de $L = \lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.
3. La série $\sum x_n$ converge-t-elle ?
4. Donner un équivalent de x_n pour $n \to +\infty$.

Exercice 10

D'après Centrale MP : Soit (u_n) une suite à termes complexes dont la série est absolument convergente.

1. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum u_n^k$ converge.

On suppose pour toute la suite que pour tout entier k on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n^k = 0$

2. Justifier l'existence d'un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$ on a $|u_n| < 1$.

Pour toute la suite, on note pour tout entier k : $S_k = \sum\limits_{n=0}^{n_0-1} u_n^k$ et $R_k = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n^k$

3. Montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} S_k = 0$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} R_k = 0$.
4. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $\sum\limits_{n=0}^{n_0-1} P(u_n) u_n^k \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.
5. En déduire que pour tout entier n on a $|u_n| < 1$.
6. Montrer finalement que (u_n) est la suite nulle.

Corrigé de l'exercice 1

Le mieux pour obtenir la nature de la série en question est d'effectuer une comparaison immédiate aux séries de Riemann. On a en effet pour tout réel $\alpha > 0$:

$$n^\alpha u_n = \exp\left(\alpha \ln(n) - \ln(\ln(n))^2\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

La limite se trouve par croissance comparée en posant $x = \ln(n)$. On en déduit qu'à partir d'un certain rang on a $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ et le choix de tout $\alpha \in]0, 1[$ et les règles de comparaison pour les séries à termes positifs indiquent que $\sum u_n$ diverge.

Corrigé de l'exercice 2

Dans un premier temps, il est préférable de décomposer en élément simple la fraction $\dfrac{n+1}{an+b}$:

$$\frac{n+1}{an+b} = a^{-1} + \frac{1-a^{-1}b}{an+b}$$

On peut alors commencer à distinguer les cas selon la valeur de a^{-1} :

- Si $a^{-1} > 1$ c'est à dire $a < 1$, il est clair que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ puisque $u_n \geqslant (a^{-1})^{n\ln(n)}$donc la série diverge grossièrement.

- Si $a^{-1} < 1$ c'est à dire $a > 1$, en fixant arbitrairement $q \in]a^{-1}, 1[$ on trouve à partir d'un certain rang la comparaison :
$$u_n \leqslant q^{n\ln(n)} \leqslant q^n$$
Puisque $\sum q^n$ converge, les règles de comparaison pour les séries à termes positifs donne la convergence de $\sum u_n$.

- Pour $a = 1$, il faut procéder à un développement asymptotique de u_n. Pour plus de commodité, on pose $c = 1 - b$:
$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n\ln(n)\ln\left(1+\frac{c}{n+b}\right)\right) \\ &= \exp\left(n\ln(n)\left(\frac{c}{n+b} + \frac{c^2}{2(n+b)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(c\ln(n) + O\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) \sim \exp(c\ln(n)) = \frac{1}{n^c} \end{aligned}$$
Par comparaison à une série de Riemann, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si $c > 1$ ce qui est impossible puisque $b > 0$.

Finalement, la série converge si et seulement si $a > 1$ (sans condition sur b).