BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 287

Concours d'admission de 2017

Conception : ESSEC

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES II

Mercredi 3 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Etudier l'évolution des inégalités dans la répartition des richesses, matérielles ou symboliques, dans une société est un des thèmes majeurs des sciences humaines. Considérons un exemple élémentaire. Le tableau ci-dessous présente le pourcentage d'accès à l'enseignement secondaire en Grande-Bretagne lors de deux périodes pour deux catégories sociales.

	avant 1910	entre 1935 et 1940
Profession libérale	37%	62%
Ouvriers	1%	10%

On propose trois modes de comparaison des inégalités entre les deux classes sociales.

1) En regardant l'augmentation des pourcentages pour les deux classes entre les deux périodes on conclut que l'inégalité a augmenté entre la classe la plus aisée (Profession libérale) et la plus défavorisée (Ouvriers).

2) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages, comme $\frac{10}{1} > \frac{62}{37}$, on déduit que l'inégalité a diminué.

3) Si on regarde le taux d'accroissement des pourcentages *de ceux qui n'accèdent pas à l'enseignement secondaire*, comme $\frac{90}{99} > \frac{38}{63}$, on déduit que l'inégalité a augmenté puisque le nombre de ceux qui n'ont pas accès à l'enseignement supérieur a proportionnellement plus diminué que celui de ceux qui y ont accès.

Comme on le voit chacune des façons de voir est légitime à sa manière. L'objet du problème est d'introduire des outils afin d'étudier la *concentration* d'une loi de probabilité pour contourner des paradoxes auxquels une analyse trop rapide peut conduire, ou du moins d'en être conscient.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

I Indice de Gini

On rappelle qu'une fonction numérique définie sur l'intervalle J de $\mathbb{R}$ est *convexe* sur J si elle vérifie la propriété suivante : $\forall (t_1, t_2) \in J^2, \forall \lambda \in [0,1], f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \leq \lambda f(t_1) + (1-\lambda) f(t_2)$.

On rappelle en outre qu'une fonction f est *concave* si $-f$ est convexe.

On désigne par E l'ensemble des applications f définies sur [0,1] à valeurs dans [0,1], continues et convexes sur [0,1], et telles que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Pour toute application f de E, on note $\tilde{f}$ l'application associée à f, définie sur [0,1] par $\tilde{f}(t) = t - f(t)$.

On pose enfin $I(f) = 2\displaystyle\int_0^1 \tilde{f}(t)dt = 2\int_0^1 (t - f(t))dt$. $I(f)$ s'appelle l'**indice de Gini** de l'application f.

1)

(a) Donnez une interprétation géométrique de la propriété de convexité.

(b) Lorsque f est une fonction de classe C^1 sur [0,1], rappeler la caractérisation de la convexité de f sur [0,1] à l'aide de la dérivée f'.

2)

(a) Justifier que $\tilde{f}$ est concave sur [0,1].

(b) Montrer que $I(f) = 1 - 2\int_0^1 f(t)dt$.

(c) Représenter dans un même repère orthonormé les fonctions f et $t \mapsto t$ et donner une interprétation géométrique de $I(f)$.

3) Un premier exemple.

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(t) = t^2$ pour tout $t \in [0,1]$.

(a) Montrer que f est un élément de E.

(b) Calculer $I(f)$.

4) Propriétés de l'indice de Gini

(a) Pour f élément de E, établir que $I(f) \geq 0$.

(b) Montrer que $I(f) = 0$ si et seulement si $f(t) = t$ pour tout $t \in [0,1]$.

(c) Montrer que pour tout f élément de E, $I(f) < 1$.

(d) Pour tout entier $n > 0$, on définit f_n sur [0,1] par $f_n(t) = t^n$.

i) Pour tout entier n strictement positif, calculer $I(f_n)$.

ii) En déduire que pour tout réel A vérifiant $0 \leq A < 1$, il existe f appartenant à E telle que $I(f) > A$.

5) Minoration de l'indice de Gini

(a) Soit f élément de E. Montrer qu'il existe t_0 dans $]0,1[$ tel que $\tilde{f}(t_0) = \max\limits_{t\in[0,1]} \tilde{f}(t)$.

(b) Montrer que pour tout t de $[0, t_0]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\dfrac{t}{t_0}$.

(c) Montrer que pour tout t de $[t_0, 1]$, $\tilde{f}(t) \geq \tilde{f}(t_0).\dfrac{t-1}{t_0-1}$.

(d) En déduire que $I(f) \geq \tilde{f}(t_0)$.

L'indice de Gini donne une indication sur la concentration des richesses d'un pays si l'on suppose que la fonction f rend compte de cette concentration. Par exemple, $f(0,3) = 0,09$ s'interprète par le fait que dans la population classée par ordre de richesse croissante, les premiers 30 % de la population possèdent 9% de la richesse totale du pays. Plus l'indice $I(f)$ est grand, plus la répartition des richesses est inégalitaire.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

II Le cas à densité

Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty, 0]$, continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par $G(x) = \int_0^x g(\nu)d\nu$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Si g représente la densité de population classée suivant son revenu croissant, $G(x)$ représente la proportion de la population dont le revenu est inférieur à x. On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} \nu g(\nu)d\nu$ est convergente et on note m sa valeur qui représente donc la richesse moyenne de la population.

6)

(a) Montrer que $m > 0$.

(b) Montrer que G est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

(c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0, 1[$?

7)

(a) A l'aide du changement de variables $u = G(\nu)$, établir que pour tout $t \in [0, 1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} \nu g(\nu)d\nu.$$

(b) En déduire que $\int_0^1 G^{-1}(u)du$ converge et donner sa valeur.

8) Soit f la fonction définie sur [0,1] par : $f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)du$ pour tout $t \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$.

(a)

i) Montrer que f est continue sur [0,1].

ii) Montrer que f est convexe sur $[0, 1[$. **On admettra qu'en fait f est convexe sur [0,1].**

iii) En déduire que f est un élément de E.

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$I(f) = -1 + \frac{2}{m}\int_0^{\infty} \nu g(\nu)G(\nu)d\nu.$$

9) Soit λ un réel strictement positif. On suppose dans cette question que g est une densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

(a) Expliciter $G(x)$ pour $x > 0$.

(b) Expliciter $G^{-1}(u)$ pour $u \in [0, 1[$.

(c) Donner la valeur de m.

(d) Soit $t \in [0, 1[$. Montrer que $f(t) = -\int_0^t \ln(1-u)du$.

(e) En déduire que pour tout t élément de [0,1[, on a $f(t) = (1-t)\ln(1-t) + t$.

(f) Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 (1-t)\ln(1-t)dt$ et la calculer.

(g) En déduire la valeur de $I(f)$.

III Application à une population

Une population de N personnes est divisée en deux classes (typiquement hommes et femmes) et en n catégories (par exemple socio-professionnelles), suivant le tableau à double entrée suivant où tous les x_i et y_i pour i dans $[\![1, n]\!]$ sont des entiers naturels. On suppose en outre que pour tout i dans $[\![1, n]\!]$, $x_i \neq 0$.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

Classes \ Catégories	c_1	c_2	c_3	...	c_i	...	c_n	Total
I	x_1	x_2	x_3	...	x_i	...	x_n	X
II	y_1	y_2	y_3	...	y_i	...	y_n	Y
Total	n_1	n_2	n_3	...	n_i	...	n_n	N

où on a donc posé $X = \sum_{i=1}^{n} x_i, Y = \sum_{i=1}^{n} y_i$ et $X + Y = N$. On suppose en outre que $Y > 0$.

Pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, on adopte les notations suivantes :

$$p_i = \frac{n_i}{N}, q_i = \frac{x_i}{X}, r_i = \frac{y_i}{Y}.$$

On note aussi $\varepsilon_i = \frac{x_i}{n_i}$, et $\varepsilon = \frac{X}{N}$, et on suppose que les catégories sont numérotées de telle sorte que

$$\varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq \cdots \leq \varepsilon_n.$$

10) On pose $\Omega = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$, ensemble des catégories dans la population.

(a) Montrer que $P = (p_i)_{1 \leq i \leq n}, Q = (q_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $R = (r_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont des distributions de probabilités.

(b) Montrer que $\frac{q_1}{p_1} \leq \cdots \leq \frac{q_n}{p_n}$ (*)

(c) Montrer que $\frac{r_1}{p_1} \geq \cdots \geq \frac{r_n}{p_n}$

(d) Montrer que pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $r_i = \frac{n_i - x_i}{N - X} = \frac{p_i - \varepsilon q_i}{1 - \varepsilon}$.

11) Dans un premier temps, nous allons construire une application appartenant à E, qui permet de mesurer les inégalités à l'intérieur de la classe I.

On pose $P_0 = Q_0 = 0$, et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum_{h=1}^{i} p_h$ et $Q_i = \sum_{h=1}^{i} q_h$. On définit alors l'application φ de [0,1] dans [0,1] telle que, pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\varphi(P_i) = Q_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

(a) On suppose **dans cette question** $n = 3$.

Représenter dans un repère orthonormé φ lorsque $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $Q = (\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$.

(b) Montrer que, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, Q_{i-1}) et (P_i, Q_i) est $u_i = \frac{q_i}{p_i}$ pour i appartenant à $[\![1, n]\!]$.

(c) Montrer que si $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $t \in [P_i, P_{i+1}]$, on a $\varphi(t) = u_{i+1}(t - P_i) + Q_i$.

(d) **En admettant** que les inégalités (*) de la question 10(b) permettent d'affirmer que φ est convexe, justifier que φ appartient à E.

(e) Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, calculer $\int_{P_i}^{P_{i+1}} \varphi(t)dt$.

(f) Exprimer $I(\varphi)$ sous la forme d'une somme en fonction de $P_0, P_1, \ldots, P_n, Q_0, \ldots, Q_n$.

12) Nous allons maintenant étudier l'application correspondante pour la classe II.

On pose $P_0 = R_0 = 0$ et pour $i \in [\![1, n]\!]$, $P_i = \sum_{h=1}^{i} p_h$ et $R_i = \sum_{h=1}^{i} r_h$. De même on définit pour i élément de $[\![0, n]\!]$, $\Pi_i = 1 - P_{n-i}$. On considère l'application ψ de [0,1] dans [0,1] telle que pour tout entier $i \in [\![0, n]\!]$, $\psi(P_i) = R_i$ et pour tout entier $i \in [\![0, n-1]\!]$, ψ est affine sur le segment $[P_i, P_{i+1}]$.

(a) Montrer que la pente de la droite passant par les points de coordonnées (P_{i-1}, R_{i-1}) et (P_i, R_i) est $v_i = \frac{r_i}{p_i}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

(b) On considère l'application ψ^* définie pour tout $t \in [0,1]$ par $\psi^*(t) = 1 - \psi(1-t)$.

i) On suppose **dans cette question** $n = 3$.

Représenter dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de ψ et ψ^* lorsque $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ et $R = (\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

ii) Montrer que ψ^* est convexe sur [0,1].

iii) Montrer que ψ^* est affine sur chaque segment $[\Pi_i, \Pi_{i+1}]$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$.

iv) Montrer que la pente de ψ^* sur $[\Pi_{i-1}, \Pi_i]$ est v_{n-i+1} pour $i \in [\![1, n]\!]$.

On dit dans cette situation que les fonctions φ et ψ^* sont **adjointes** l'une de l'autre. C'est leur comparaison que Gini a proposé de considérer pour "mesurer les inégalités" entre la population de catégorie I et celle de catégorie II.

Une égalité entre les fonctions adjointes signale notamment l'absence totale d'inégalité sociale. La dernière question précise quelque peu ce point.

13)

(a) Montrer que si $\varphi = \psi^*$ alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$,

$$\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon} = \frac{1 - \varepsilon_{n-i+1}}{1 - \varepsilon}.$$

(b) Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, on a $\varepsilon_i + \varepsilon_{n-i+1} = 2\varepsilon$.

(c) Déduire que si $\varphi = \psi^*$, on a pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i(1 - 2\varepsilon) = \varepsilon(1 - 2\varepsilon)$.

(d) On suppose $\varepsilon \neq \frac{1}{2}$. Montrer que si $\varphi = \psi^*$, alors pour tout i appartenant à $[\![1, n]\!]$, $\varepsilon_i = \varepsilon$. Interpréter ce résultat.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.

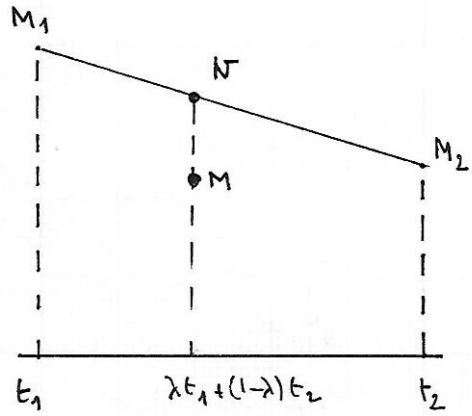
ANNALES DE MATHEMATIQUES 2017

ESSEC 2 VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

Partie I : indice de Gini

1–a)



Soit M_1 le point de coordonnées $(t_1, f(t_1))$ et M_2 celui de coordonnées $(t_2, f(t_2))$.

$0 \leq \lambda \leq 1$. Supposons $t_1 \leq t_2$; on a $\lambda t_1 \leq \lambda t_2$, donc $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \leq \lambda t_2 + (1-\lambda)t_2 = t_2$. On montre de même que $t_1 \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$. Par conséquent,

$t_1 \leq \lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 \leq t_2$. Notons M le point de coordonnées $(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, f(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2)$ et N celui de coordonnées $(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2, \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2))$.

Les points M_1, N, M_2 sont alignés. En effet, les vecteurs $\overrightarrow{M_1N}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont liés.

Le vecteur $\overrightarrow{M_1N}$ a pour coordonnées $(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2 - t_1, \lambda f(t_1) + (1-\lambda)f(t_2) - f(t_1)) = (1-\lambda)(t_2 - t_1, f(t_2) - f(t_1))$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour coordonnées $(t_2 - t_1, f(t_2) - f(t_1)$; donc $\overrightarrow{M_1N} = (1-\lambda)\overrightarrow{M_1M_2}$.

L'inégalité de convexité indique que M est sous N. Or le point N est sur le segment $[M_1, M_2]$ (même démonstration que pour montrer que $\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2$ est dans le segment $[t_1, t_2]$.)

> f est convexe veut dire que la portion de courbe entre M_1 et M_2 est sous la corde $[M_1, M_2]$

b)

Lorsque f est C^1 sur $[0,1]$, elle est convexe si et seulement si f' est croissante.

2–a)

Par définition, $\tilde{f}$ concave équivaut à $-\tilde{f}$ convexe. Montrons que f convexe implique $-\tilde{f}$ convexe.

Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 17 pages.