BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 289

Conception : HEC Paris

OPTION ÉCONOMIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 26 avril 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

1. *Exemple 1.* Soit A la matrice de $\mathcal{B}_2(\mathbf{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer la matrice A^2.

   b) Quelles sont les valeurs propres de A ?

   c) La matrice A est-elle diagonalisable ?

2. *Exemple 2.* Soit B la matrice de $\mathcal{B}_3(\mathbf{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On considère les instructions et la sortie (-->) *Scilab* suivantes :

```
B=[0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P=[1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P)*B*P
```

```
-->
 1.    0.    0.
 0.   -1.    0.
 0.    0.    1.
```


Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence *Scilab* précédente.

b) Déterminer une base de chacun des sous-espaces propres de B.

3.a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$?

b) Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1 ?

4. Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :

- id l'endomorphisme identité de E ;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + id)$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - id)$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = id$.

a) Justifier que l'image de $(u - id)$ est incluse dans F.

b) En déduire l'inégalité : $p + q \geqslant n$.

On suppose désormais que $1 \leqslant p < q$. Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$.

e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbf{R})$.

PROBLÈME

Les tables de mortalité sont utilisées en démographie et en actuariat pour prévoir l'espérance de vie des individus d'une population. On s'intéresse dans ce problème à un modèle qui permet d'ajuster la durée de vie à des statistiques portant sur les décès observés au sein d'une génération.

Dans tout le problème, on note :

- a et b deux réels strictement positifs ;
- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé sur lequel sont définies toutes les variables aléatoires du problème ;
- $G_{a,b}$ la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $G_{a,b}(x) = \exp\left(-a\,x - \dfrac{b}{2}x^2\right)$.

Partie I. Loi exponentielle linéaire

1.a) Montrer que la fonction $G_{a,b}$ réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur l'intervalle $]\,0, 1\,]$.

b) Pour tout réel $y > 0$, résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbf{R}$: $a\,x + \dfrac{b}{2}x^2 = y$.

c) On note $G_{a,b}^{-1}$ la bijection réciproque de $G_{a,b}$. Quelle est, pour tout $u \in [\,0, 1[$, l'expression de $G_{a,b}^{-1}(1 - u)$?

2.a) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{b}{2\pi}} \times \exp\left(-\dfrac{1}{2}\,b\left(x + \dfrac{a}{b}\right)^2\right)$.

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire suivant une loi normale dont on précisera les paramètres (espérance et variance).

c) Soit Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Déduire de la question 2.b), l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2\pi}{b}} \times \exp\left(\frac{a^2}{2b}\right) \times \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

3. Pour tout $a > 0$ et pour tout $b > 0$, on pose : $f_{a,b}(x) = \begin{cases} (a+bx)\exp\left(-ax - \dfrac{b}{2}x^2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

a) Justifier que la fonction $f_{a,b}$ est une densité de probabilité.

On dit qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle linéaire de paramètres a et b, notée $\mathcal{E}_\ell(a,b)$, si elle admet $f_{a,b}$ pour densité.

b) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$. À l'aide d'une intégration par parties, justifier que X admet une espérance $E(X)$ telle que : $E(X) = \displaystyle\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)\,\mathrm{d}x$.

4. Soit Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1. On pose : $X = \dfrac{-a + \sqrt{a^2 + 2bY}}{b}$.

a) Justifier que pour tout réel $x \in \mathbf{R}_+$, on a : $P\big([X \geqslant x]\big) = G_{a,b}(x)$.

b) En déduire que X suit la loi $\mathcal{E}_\ell(a,b)$.

c) On note U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\,0,1[$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $G_{a,b}^{-1}(1-U)$.

5. La fonction *Scilab* suivante génère des simulations de la loi exponentielle linéaire.

```
(1)  function x=grandlinexp(a,b,n)
(2)    u=rand(n,1)
(3)    y= .........
(4)    x=(-a+sqrt(a^2+2*b*y))/b
(5)  endfunction
```

a) Quelle est la signification de la ligne de code (2) ?

b) Compléter la ligne de code (3) pour que la fonction `grandlinexp` génère les simulations désirées.

6. De quel nombre réel peut-on penser que les six valeurs générées par la boucle *Scilab* suivante fourniront des valeurs approchées de plus en plus précises et pourquoi ?

```
for k=1:6
  mean(grandlinexp(0,1,10^k))
end
```

Dans la suite du problème, on note $(X_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant chacune la loi exponentielle linéaire $\mathcal{E}_\ell(a,b)$ dont les paramètres $a > 0$ et $b > 0$ sont inconnus.

Soit h un entier supérieur ou égal à 2. On suit pendant une période de h années, une "cohorte" de n individus de même âge au début de l'étude et on modélise leurs durées de vie respectives à partir de cette date par les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Partie II. Premier décès et intervalle de confiance de a

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on définit les variables aléatoires M_n, H_n et U_n par :

$$M_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n), \quad H_n = \min(h, X_1, X_2, \ldots, X_n) \quad \text{et} \quad U_n = nH_n\,.$$

7. Calculer pour tout $x \in \mathbf{R}_+$, la probabilité $P\big([M_n \geqslant x]\big)$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire M_n.

8. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note F_{U_n} la fonction de répartition de la variable aléatoire U_n.

Tournez la page S.V.P.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a : $F_{U_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-a\,x - \dfrac{b}{2n}\,x^2\right) & \text{si } 0 \leqslant x < nh \\ 1 & \text{si } x \geqslant nh \end{cases}$.

b) Étudier la continuité de la fonction F_{U_n}.

c) La variable aléatoire U_n admet-elle une densité ?

d) Montrer que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

9. Soit $\alpha \in]\,0,1[$.

a) Soit Y une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

Trouver deux réels c et d strictement positifs tels que :

$$P\big([\,c \leqslant Y \leqslant d\,]\big) = 1-\alpha \quad \text{et} \quad P\big([Y \leqslant c]\big) = \frac{\alpha}{2}\cdot$$

b) Montrer que $\left[\dfrac{c}{U_n}, \dfrac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a, de niveau de confiance $1-\alpha$.

Partie III. Nombre de survivants et estimateur convergent de b

Pour tout $i \in \mathbf{N}^*$, soit S_i et D_i les variables aléatoires telles que : $S_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \geqslant h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $D_i = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $\overline{S}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$ et $\overline{D}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$.

10.a) Justifier que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on a $E(S_i) = G_{a,b}(h)$ et calculer $E(S_iD_i)$.

b) Pour quels couples $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, les variables aléatoires S_i et D_j sont-elles indépendantes ?

c) Déduire des questions précédentes l'expression de la covariance $\mathrm{Cov}(\overline{S}_n, \overline{D}_n)$ de $\overline{S}_n$ et $\overline{D}_n$ en fonction de n, $G_{a,b}(h)$ et $G_{a,b}(1)$. Le signe de cette covariance était-il prévisible ?

11.a) Montrer que $\overline{S}_n$ est un estimateur sans biais et convergent du paramètre $G_{a,b}(h)$.

b) De quel paramètre, $\overline{D}_n$ est-il un estimateur sans biais et convergent ?

12. On pose : $z(a,b) = \ln\big(G_{a,b}(1)\big)$ et $r(a,b) = \ln\big(G_{a,b}(h)\big)$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $Z_n = \ln\left(1 - \overline{D}_n + \dfrac{1}{n}\right)$ et $R_n = \ln\left(\overline{S}_n + \dfrac{1}{n}\right)$.

On admet que Z_n et R_n sont des estimateurs convergents de $z(a,b)$ et $r(a,b)$ respectivement.

a) Soit ε, λ et μ des réels strictement positifs.

(*i*) Justifier l'inclusion suivante :

$$\big[\big|(\lambda\,Z_n - \mu\,R_n) - (\lambda\,z(a,b) - \mu\,r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big] \subset \big[\lambda\big|Z_n - z(a,b)\big| + \mu\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \varepsilon\big]\,.$$

(*ii*) En déduire l'inégalité suivante :

$$P\big(\big[\big|(\lambda\,Z_n - \mu\,R_n) - (\lambda\,z(a,b) - \mu\,r(a,b))\big| \geqslant \varepsilon\big]\big) \leqslant P\left(\left[\big|Z_n - z(a,b)\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right]\right) + P\left(\left[\big|R_n - r(a,b)\big| \geqslant \frac{\varepsilon}{2\mu}\right]\right)\cdot$$

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose : $B_n = \dfrac{2}{h-1}\,Z_n - \dfrac{2}{h(h-1)}\,R_n$.

Montrer que B_n est un estimateur convergent du paramètre b.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

ANNALES DE MATHEMATIQUES 2017

HEC VOIE ECONOMIQUE

CORRIGE

EXERCICE

1) *Exemple 1*

a) $A^2 = I$ (calcul facile).

b) Il y a deux façons de procéder.

• Première façon : on a $A^2 - I = (0)$; le polynôme $X^2 - 1$ est annulateur de A. D'après le cours, les valeurs propres éventuelles de A sont racines de $X^2 - 1$.

$$\text{spect}(A) \subset \{-1, 1\}.$$

Vérifions que -1 est valeur propre ; $A - (-1)I = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est manifestement pas inversible (elle possède deux colonnes égales), donc -1 est valeur propre de A.

$A - I = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Cette matrice n'est pas inversible car ses colonnes sont opposées, donc proportionnelles : 1 est valeur propre.

$$\text{Conclusion : spect}(A) = \{-1, 1\}$$

• Seconde façon : c'est la méthode classique. On cherche les réels λ tels que la matrice $A - \lambda I$ ne soit pas inversible. Nous ne traiterons pas cette méthode bien connue des étudiants car, dans le cas présent, elle ignore le résultat du a).

c) La matrice A possède deux valeurs propres distinctes, elle est carrée d'ordre 2, elle est donc diagonalisable (c'est une conditions suffisante de diagonalisabilité).

2) *Exemple 2*

a) En langage mathématique, ce script s'écrit : il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cela veut dire que B est semblable à la matrice diagonale $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donc B est diagonalisable et ses valeurs propres sont -1 et 1.

b) D'après la formule de passage pour les matrices carrées, les colonnes de la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres de A associées respectivement à $1, -1, 1$.

Si nous notons $E(\lambda)$ le sous-espace propre de B associé à la valeur propre λ, alors

$$E(1) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \; ; \; E(-1) = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.

3–a)

Une matrice de $B_n(\mathbb{R})$ possède n^2 coefficients. Pour chaque coefficient, il y a deux possibilités : -1 ou 1. Donc

$$\boxed{\text{Il y a } 2^{(n^2)} \text{ matrices dans } B_n(\mathbb{R})}$$

b)

Raisonnons par exemple sur les colonnes.

Dans la première colonne, il y a un seul coefficient égal à 1 ; il y a n places possibles pour ce coefficient.

Dans la deuxième colonne, le seul coefficient égal à 1 n'a plus que $n-1$ places possibles (il ne peut pas être sur la même ligne que le coefficient 1 de la première colonne). Donc il y a $n(n-1)$ places possibles pour les coefficients 1 des deux premières colonnes. Pour le coefficient 1 de la troisième colonne, il y a $n-2$ places possibles, donc $n(n-1)(n-2)$ places possibles pour les trois premiers coefficients. Et ainsi de suite.

$$\boxed{\text{Il existe } n! \text{ matrices de } B_n(\mathbb{R}) \text{ répondant à la question}}$$

Une autre façon de procéder au décompte. Faisons la liste des numéros des lignes occupées par ces coefficients 1.

Le premier élément de cette liste sera le numéro de la ligne occupée par le coefficient 1 de la première colonne. D'une manière générale, le $k^{\text{ème}}$ élément de cette liste sera le numéro de la ligne occupée par le coefficient 1 de la $k^{\text{ème}}$ colonne. On obtient une liste de n entiers de $[\![1,n]\!]$, distincts deux à deux. C'est une permutation de $[\![1,n]\!]$. D'après le cours, il y en a $n!$.

4–a)

Soit $y \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id})$. Il existe $x \in E \ / \ y = (u-\mathrm{Id})(x)$.

$(u+\mathrm{Id})(y) = (u+\mathrm{Id})(u-\mathrm{Id})(x) = (u^2-\mathrm{Id})(x) = 0$; donc $(u+\mathrm{Id})(y) = 0$.

$$\boxed{\forall y \in \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}),\ y \in \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}) : \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})}$$

b)

D'après le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $(u-\mathrm{Id})$ on a :

$\dim E = \dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) + \dim \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}) \iff n = \dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) + q$.

Or $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \subset \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id}) \Longrightarrow \dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \leq \dim \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})$, c'est-à-dire $\dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) \leq p$. Par suite, $\dim \mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}) + q \leq p+q$. L'égalité précédente donne

$$\boxed{n \leq p+q}$$

c)

Soit $(a_1,\ldots,a_p,b_1,\ldots,b_q) \in \mathbb{R}^{p+q} \ / \ \sum_{k=1}^{p} a_k f_k + \sum_{k=1}^{q} b_k g_k = 0.$ **(4.c)**

On applique $u+\mathrm{Id}$ aux deux termes de l'égalité ; comme $f_k \in \mathrm{Ker}(u+\mathrm{Id})$ pour $1 \leq k \leq p$, il vient $\sum_{k=1}^{q} b_k(u+\mathrm{Id})g_k = 0 \iff \sum_{k=1}^{q} b_k(u+\mathrm{Id})g_k = \sum_{k=1}^{q} b_k(u(g_k)+g_k) = 0.$

Or $g_k \in \mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id})$, donc $u(g_k) = g_k$; par suite l'égalité précédente devient $\sum_{k=1}^{q} 2b_k g_k = 0$.

La famille $(g_k)_{1\leq k\leq q}$ est une base de G.

© EDUKLUB SA
Tous droits de l'auteur des oeuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des oeuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.
Extrait gratuit de document, le document original comporte 16 pages.