Enoncés

1) a) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{2kp, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\text{Re}\left(\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}}\right)$ et $\text{Im}\left(\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}}\right)$.

b) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)p, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminer $\text{Re}\left(\frac{1 + e^{i\alpha}}{1 + e^{i\beta}}\right)$ et $\text{Im}\left(\frac{1 + e^{i\alpha}}{1 + e^{i\beta}}\right)$.

2) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer qu'il existe un unique nombre complexe b avec $\text{Re}(b)>0$ tel que $b^2=a$.

3) Soit x un nombre réel. Déterminer l'expression de $\cos^4 x$ et de $\sin^4 x$ en fonction des $(\cos(kx))_{1 \leq k \leq 4}$.

4) On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, une autre expression de $S_n(x)$.

5) Soit n un entier naturel. Déterminer l'ensemble des réels x solutions du système : $\begin{cases} \cos x = \cos(nx) \\ -\sin x = \sin(nx) \end{cases}$.

Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE
© EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.

Correction

1) a) ■ On a :

$$\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}} = \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{i\frac{\beta}{2}}} \times \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}}{e^{-i\frac{\beta}{2}} - e^{i\frac{\beta}{2}}}$$

donc, d'après les formules d'Euler :

$$= \frac{e^{i\frac{a}{2}}}{e^{i\frac{b}{2}}} \times \frac{-2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

et donc :

$$= \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} e^{i\frac{a-b}{2}} \text{ ①.}$$

On peut alors écrire :

$$\text{Â}_e\left(\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

soit encore d'après les formules trigonométriques usuelles :

$$= \frac{\sin\left(\frac{2\alpha - \beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

soit finalement :

$$\text{Â}_e\left(\frac{1 - e^{i\alpha}}{1 - e^{i\beta}}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2\alpha - \beta}{2}\right)}{2\sin\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}$$

 Matthias FEGYVERES – Stéphane PRETESEILLE © EduKlub S.A.
Tous droits de l'auteur des œuvres réservés. Sauf autorisation, la reproduction ainsi que toute utilisation des œuvres autre que la consultation individuelle et privée sont interdites.

Extrait gratuit de document, le document original comporte 7 pages.