Les exercices qui suivent sont essentiellement extraits des oraux des concours Centrale et Mines-Ponts des filières MP,PC et PSI. Leur niveau et leur exactitude ont été scrupuleusement vérifiés. Le cas échéant, les énoncés ont pu être légèrement modifiés pour en relever le niveau ou en donner une vision plus générale.

Le thème de ces exercices est le calcul polynomial. Il comprend bien sûr le calcul sur les nombres complexes et plus largement le calcul algébrique. Ces notions, traitées en première année, sont généralement reprises en deuxième année mais ne font pas souvent l'objet d'une reprise systématique du cours. On ne peut que conseiller de reprendre ces notions le plus tôt possible dans l'année et de prolonger le travail jusqu'à la préparation des oraux.

Bon travail à tous !

Exercice 1

D'après ENSAM MP. Soit P un polynôme à coefficients réels scindé à racines réelles et simples. On pose $Q = XP$. Montrer que Q' est scindé à racines simples réelles.

Exercice 2

D'après Mines-Ponts PSI. Soit a un réel, n un entier naturel non nul. Résoudre l'équation $\left(\dfrac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \dfrac{1-ia}{1+ia}$

Exercice 3

D'après Centrale MP : Soit $P = X^3+aX^2+bX+c$ une polynôme dont les racines complexes sont α, β, γ. Calculer (si cela est défini) en fonction de a, b, c le complexe :

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}$$

Exercice 4

D'après Mines-Ponts PSI : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)$.

1. Montrer qu'il existe un unique $x_n \in]0,1[$ tel que $P'(x_n) = 0$.
2. En utilisant la décomposition de $\dfrac{P_n'}{P_n}$, montrer que $x_n \longrightarrow 0$ pour $n \to +\infty$ et en donner un équivalent.

Exercice 5

D'après Mines-Ponts MP : Soit P un polynôme dont les racines sont réelles et simples. Montrer que pour tout x réel on a $P'(x)^2 - P(x)P''(x) > 0$.

Exercice 6

D'après Mines-Ponts MP : Soit P un polynôme à coefficients réels non nul vérifiant la relation :

$$P(X^2) = P(X)P(X-1)$$

1. Montrer que si λ est racine de P, alors $|\lambda| = 1$.
2. Déterminer les racines de P.
3. En déduire la forme de P.

Exercice 7

D'après Centrale MP : Soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $T(P) = P(X+1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n sa restriction à $\mathbb{R}_n[X]$.

1. (a) Calculer la matrice M_n de l'endomorphisme T_n dans la base $\{1, X, ..., X^n\}$.
   (b) Justifier que M_n est inversible et déterminer son inverse.
2. Pour tout entier n non nul on pose $H_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X-k)$. Si $a_1, ..., a_n$ sont des complexes, on pose $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k H_k$. Montrer qu'on a les relations suivantes.
   (a) Pour $k = 1, ..., n$, $\displaystyle\sum_{q=0}^{k}(-1)^{k+q}\binom{k}{q}P(q) = a_k$.
   (b) Pour $k \geqslant n+1$, $\displaystyle\sum_{q=0}^{k}(-1)^{k+q}\binom{k}{q}P(q) = 0$.

Exercice 8

D'après Mines-Ponts MP : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer l'équivalence :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geqslant 0) \Longleftrightarrow \exists A, B \in \mathbb{R}[X]/P = A^2 + B^2$$

   On pourra étudier les multiplicités des racines réelles.
2. L'équivalence est-elle vraie si on remplace $x \in \mathbb{R}$ par $x \in \mathbb{R}^+$?

Exercice 9

D'après Mines-Ponts MP : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que P est à coefficients rationnels.

Exercice 10

D'après Centrale MP : Pour E un espace vectoriel et $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ des vecteurs de E, on appelle *combinaison convexe* des (z_i) toute combinaison linéaire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i z_i$ avec $\alpha_i \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1$ (il s'agit en fait d'un *barycentre* pondéré des (z_i)).

1. (a) Soit P un polynôme de degré 2 aux racines complexes α et β. Calculer la racine de P' en fonction de α et β.
   (b) Soit P un polynôme de degré $n \geqslant 2$ quelconque. Comment exprimer la racine de $P^{(n-1)}$?
2. (a) Soit $(z_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in (\mathbb{C}^*)^n$. Montrer l'équivalence :

$$0 \text{ est combinaison convexe des } (z_i) \iff 0 \text{ est combinaison convexe des } ((z_i)^{-1})$$

   (b) Soit $\varphi : \mathbb{C}[X]\setminus\{0\} \to \mathbb{C}(X)$ définie par $\varphi(P) = \dfrac{P'}{P}$. Montrer que pour tout P_1, P_2 on a $\varphi(P_1P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$.
   (c) En déduire la décomposition en élément simple de toute fraction $\dfrac{P'}{P}$, $P \in \mathbb{C}[X]\setminus\{0\}$.
   (d) Montrer que pour tout polynôme P, toute racine de P' est combinaison convexe des racines de P.

Corrigé de l'exercice 1

Notons n le degré du polynôme P. La présence du facteur X invite à faire la distinction de cas qui suit.

- Si 0 n'est pas racine de P, alors Q admet $n+1$ racines réelles distinctes que sont 0 et les n autres racines de P. On les notes dans l'ordre croissant $\alpha_1, ..., \alpha_{n+1}$. Une application du théorème de Rolle sur chaque intervalle $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$ fournit une racine de Q' telle que $\beta_i \in]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$.

  On trouve précisément n racines distinctes réelles pour Q'. Comme ce polynôme est de degré n, ce sont les seules et il devient scindé à racines réelles simples. Ces racines sont alors non nulles car elle ne peuvent aucun des α_i et 0 est un des α_i.

- Si 0 est racine de P, le raisonnement précédent donne $n-1$ racines distinctes non nulles à Q'. De plus, dans ce cas, 0 est racine double de Q donc $Q'(0) = 0$ et on trouve alors la n-ième racine réelle qu'est 0 pour Q'.

Corrigé de l'exercice 2

L'équation est définie pour $z \neq i$. On pose $Z = \dfrac{1-iz}{1+iz}$ et l'équation devient $Z^n = A$ où $A = \dfrac{1-ia}{1+ia}$. Cela revient donc à chercher les racines n-ième du complexe A.

A est clairement de module 1 et si θ désigne un de ses arguments on a :

$$\cos(\theta) = \frac{1-a^2}{1+a^2} \text{ et } \sin(\theta) = -\frac{2a}{1+a^2}.$$

On peut alors identifier des formules trigonométriques faisant intervenir la tangente de l'angle moitié. En effet, soit α l'unique élément de $]-\pi, \pi[$ tel que $\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = a$. Alors on a $\cos(\theta) = \cos(\alpha)$ et $\sin(\theta) = -\sin(\alpha)$, si bien que l'argument principal de A est $-\alpha = -2\arctan(a)$.

On a alors

$$Z^n = A \iff Z = \exp\left(i\frac{-2\arctan(a) + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, ..., n-1.$$

Notons alors ω_k le complexe $\exp\left(i\dfrac{-2\arctan(a) + 2k\pi}{n}\right)$. On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-iz}{1+iz}\right)^n = \frac{1-ia}{1+ia} &\iff \frac{1-iz}{1+iz} = \omega_k, k = 1, ..., n \\ &\iff z = i\frac{\omega_k - 1}{\omega_k + 1}, k = 1, ..., n \text{ et } z \neq i\end{aligned}$$